

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ιανουάριος 2018

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). **Καλή Επιτυχία.**

~~Θέμα 1~~ : Να μετατραπεί ο αριθμός του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης 45.6875, σε αριθμό του δυαδικού συστήματος αρίθμησης.

β) Να βρεθεί το αποτέλεσμα των πράξεων $xy + z$, όπου $x = 16.6$, $y = 0.814$, $z = 1.27$, αν αυτές εκτελεστούν από ηλεκτρονικό υπολογιστή που δουλεύει στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης (το β της Μηχανής είναι 10) και αποθηκεύει τα δεδομένα και τα ενδιάμεσα αποτελέσματα, στρογγυλεύοντάς τα σε δύο σημαντικά ψηφία (το t της Μηχανής είναι 2).

~~Θέμα 2~~ : Δίνεται η εξίσωση $f(x) = x^5 - 10x + 1 = 0$. Να αποδειχτεί ότι στο διάστημα $[0, 1]$ αυτή έχει μια μοναδική απλή ρίζα x^* . Για την εύρεση της ρίζας αυτής προτείνεται ο αλγόριθμος

$$x_{n+1} = \frac{1}{10}(x_n^5 + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Να αποδείξετε ότι ο αλγόριθμος συγκλίνει στη ρίζα x^* για κάθε x_0 στο διάστημα $I = [0, 1]$.

~~Θέμα 3~~ : Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, με τη μέθοδο της LU παραγοντοποίησης. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις διατηρώντας κλάσματα στους υπολογισμούς.)

~~Θέμα 4~~ : Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής της συνάρτησης f που δίνεται από τον πίνακα τιμών $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 2 & -2 & 0 \end{array}$, με τη μέθοδο διαιρεμένων διαφορών του Νεύτωνα. Στη συνέχεια να βρεθεί η f όταν είναι γνωστό ότι είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου 1, χρησιμοποιώντας μόνο παρεμβολή.

~~Θέμα 5~~ : α) Δοθέντος ότι η συνάρτηση f , που δίνεται από τον πίνακα τιμών:

$$\begin{array}{c|cccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \hline f_i & 0 & 1 & 0 & 16 \end{array}$$

είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού, να βρεθούν οι ακριβείς τιμές των ολοκληρωμάτων: $\int_0^1 f(x) dx$ και $\int_2^4 f(x) dx$, χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης, χωρίς να βρεθεί η f .

β) Μέχρι ποιου βαθμού πολυώνυμα είναι ακριβής ο τύπος αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx 2f(0) + \frac{1}{3}f''(0);$$